

Solución:

Sección 01: Profesor: José Ricardo ARTEAGA B.

| | | | | | |
|--------|----|----|----|----|-------|
| Prob. | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
| Valor | 10 | 10 | 10 | 20 | 50 |
| Puntos | | | | | |

Escriba todo su análisis si desea recibir el máximo valor en cada punto.

Respuesta sin justificar se invalida.

No puede usar calculadora

Problema 1. [10 Ptos.] Llene la casilla en blanco con F (Falso) o V (Verdadero), según sea el caso. En todos los casos todas las matrices son cuadradas $n \times n$. No olvide la justificación.

a) [5 pt.] La rapidez de una partícula con función posición $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{2}t\mathbf{i} + e^{4t}\mathbf{j} + e^{-4t}\mathbf{k}$ es:

$v = 4(e^{4t} + e^{-4t}) = 8 \cosh 4t$ V

b) [5 pt.] El vector posición de una partícula que tiene aceleración $\mathbf{a}(t) = 10t\mathbf{i} + 14t\mathbf{j} + (18t + 4)\mathbf{k}$, velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = 5\mathbf{j}$ y posición inicial $\mathbf{r}(0) = 12\mathbf{i} + \mathbf{k}$ es:

$\mathbf{r}(t) = (5t^2 + 12t)\mathbf{i} + (7t^2 + 5)\mathbf{j} + (3t^3 + 2t^2 + t)\mathbf{k}$ F

Solución:

a) $\vec{r}'(t) = \langle 4\sqrt{2}, 4e^{4t}, -4e^{-4t} \rangle$

$v = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{32 + 16e^{8t} + 16e^{-8t}}$

$v = 4\sqrt{e^{8t} + 2 + e^{-8t}} = 4\sqrt{(e^{4t} + e^{-4t})^2}$
 $v = 4(e^{4t} + e^{-4t})$

b) $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt = \langle 10t + c_1, 14t + c_2, 9t^2 + 4t + c_3 \rangle$
 $\vec{v}(0) = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle 0, 5, 0 \rangle \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c_1 = 0, c_2 = 5, \\ c_3 = 0 \end{matrix}}$

$\vec{v}(t) = \langle 10t, 14t + 5, 9t^2 + 4t \rangle$

$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \langle 5t^2 + d_1, 7t^2 + 5t + d_2, 3t^3 + 2t^2 + d_3 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle = \langle 12, 0, 1 \rangle \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} d_1 = 12 \\ d_2 = 0 \\ d_3 = 1 \end{matrix}}$

¹El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

$\vec{r}(t) = \langle 5t^2 + 12, 7t^2 + 5t, 3t^3 + 2t^2 + 1 \rangle$

Problema 2. [10 Ptos.] Suponga que una partícula que va siguiendo la trayectoria $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \ln t \rangle$, ($t \geq 1$) sale por la tangente en $t = 2$.

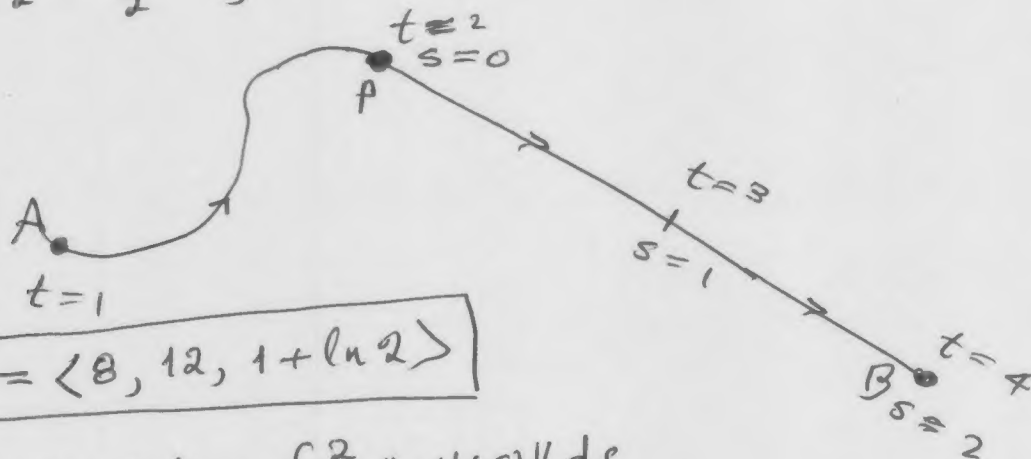
- a) [5 pt.] Calcule las coordenadas del punto en que se encuentra en el instante $t = 4$.
 b) [5 pt.] Calcule la distancia recorrida por la partícula desde $t = 1$ hasta el instante $t = 4$.

Sol: $\vec{r}(1) = \langle 2, 1, 0 \rangle$
 $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \ln t \rangle \rightarrow \vec{r}'(t) = \langle 2, 2t, \frac{1}{t} \rangle$; $t \geq 1$
 $\vec{r}(2) = \langle 4, 4, \ln 2 \rangle = P$ ~~the~~ $\vec{r}'(2) = \langle 2, 4, \frac{1}{2} \rangle = \vec{v}$

Recta tangente. Necesitamos un punto P y un vector director \vec{v}

Sea $\alpha(s)$ la parametrización de la recta tangente en $t = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 2s \\ y = 4 + 4s \\ z = \ln 2 + \frac{1}{2}s \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha(s) = \langle 4 + 2s, 4 + 4s, \ln 2 + \frac{1}{2}s \rangle$$



a) $B = \alpha(2) = \langle 8, 12, 1 + \ln 2 \rangle$

b) $L = \int_1^2 \|\vec{r}'(t)\| dt + \int_0^2 \|\alpha'(s)\| ds$
 $L = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} dt + \int_0^2 \sqrt{4 + 16 + \frac{1}{4}} ds$
 $L = \int_1^2 \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}} dt + \int_0^2 \sqrt{\frac{20 + 1}{4}} ds$
 $L = \int_1^2 \frac{\sqrt{(2t^2 + 1)^2}}{t} dt + \frac{9}{2} \int_0^2 ds$
 $L = \int_1^2 (2t + \frac{1}{t}) dt + 9 = (t^2 + \ln t) \Big|_1^2 + 9$
 $L = 3 + \ln 2 + 9 \Rightarrow \boxed{L = 12 + \ln 2}$

Problema 3. [10 Ptos.] El radio de curvatura R_c de una curva suave C en un punto donde su curvatura² no sea cero es el recíproco de ésta, es decir $R_c = \frac{1}{\kappa}$.

a) [5 pt.] Calcule el radio de curvatura de la curva $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

b) [5 pt.] Muestre que su radio de curvatura R_c en el punto (x, y) es y^2 .

Nota: Considere la curva C inmersa en \mathbf{R}^3 , $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), 0 \rangle$.

Sol

$$x(t) = t$$

$$y(t) = \cosh t$$

$$\vec{r}(t) = \langle t, \cosh t, 0 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, \sinh t, 0 \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle 0, \cosh t, 0 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \langle 0, 0, \cosh t \rangle \Rightarrow \|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \cosh t$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$$

$$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

$$a) \boxed{R_c(t) = \cosh^2 t}$$

$$b) \underline{R_c(x, y) = y^2}$$

$$^2 \kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Problema 4. [20 Ptos.]

- a) [5 pt.] Encuentre la ecuación lineal del plano α determinado por los puntos $A(2, 1, -3)$, $B(5, -1, 4)$, $C(2, -2, 4)$.
- b) [5 pt.] Encuentre la ecuación del plano β ortogonal a la recta $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 - t$, y que pasa por $A(2, 1, -3)$.
- c) [5 pt.] Encuentre la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos $7x - 21y - 9z = 20$, $2x - 3y - z = 4$.
- c) [5 pt.] Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $A(2, 1, -3)$, es paralela al plano $7x - 21y - 9z = 20$ y es perpendicular a la recta $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 - t$.

Sol:

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{u} &= \overrightarrow{BA} = \langle -3, 2, -7 \rangle \\ \vec{v} &= \overrightarrow{BC} = \langle -3, -1, 0 \rangle \\ \vec{n}_1 &= \vec{u} \times \vec{v} = \langle -7, 21, 9 \rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -7x + 21y + 9z = d \\ d = -7(2) + 21(1) + 9(-3) \\ d = -20 \end{cases}$$

$$a) \quad \boxed{7x - 21y - 9z = 20}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \vec{n}_2 &= \langle 2, -3, -1 \rangle \quad P = A \\ 2x - 3y - z &= d \\ d &= 2(2) - 3(1) - 1(-3) \\ d &= 4 - 3 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$b) \quad \boxed{2x - 3y - z = 4}$$

Explicación: En cualquiera de los casos necesitamos un punto y un vector

c) Dado que los planos son los pedidos por a) y b) $\Rightarrow A \in$ ambos planos

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -21 & -9 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \langle -6, -11, 21 \rangle$$

$$\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 1 - 11t \\ z = -3 + 21t \end{cases}$$

d) $P = A$ El problema es el mismo anterior, porque

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -21 & -9 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \langle -6, -11, 21 \rangle$$

$$\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 1 - 11t \\ z = -3 + 21t \end{cases}$$

Tiempo: 70 minutos
Buena Suerte!